261 - Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cadre : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(E, \mathcal{E})$ un espace probabilisable et $d \in \mathbb{N}^\star$.

I Loi d'une variable aléatoire

1) Définitions et premières conséquences

Définition 1. (i) Une fonction mesurable $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ est appelée variable aléatoire.

(ii) On note $\mathbb{P}_X$ la mesure image de $\mathbb{P}$ par X, que l'on appelle loi de X.

(iii) Si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, X est dite réelle.

(iv) Si $X(\Omega)$ est dénombrable presque sûrement, X est dite discrète.

(v) Si $\mathbb{P}_X$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ, on dit que X est à densité de densité $d\mathbb{P}_X/d\lambda$.

Exemple 2. *(i) Résultat du lancer d'une pièce :* $E = \{P, F\}$.

(ii) Couleur d'une boule tirée dans une urne : $E = \{\textit{couleurs}\}$.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

Proposition 3. *Soient I au plus dénombrable et $E' = (e_i)_{i \in I} \subset E$ tel que $X(\Omega) \subset E'$. Alors $\mathbb{P}_X$ est caractérisée par $(p_i)_{i \in I}$, où $p_i = \mathbb{P}(X = e_i)$ avec $\sum_{i \in I} p_i = 1$ et $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in I} p_i \delta_{e_i}$.*

Remarque 4. *Réciproquement, si $f : E' \to [0,1]$ est telle que $\sum_{i \in I} f(e_i) = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(E, \mathcal{E})$ telle que $\mathbb{P}(e_i) = f(e_i)$. Une variable aléatoire suivant cette loi est alors discrète.*

Exemple 5. $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n,p)$, $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{G}(q)$ *et leur loi. (cf Annexe)*

2) Caractérisation par l'espérance de fonctions

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{R}^d$.

Remarque 6. $\mathbb{P}_X$ *est déterminé par son image sur les boréliens.*

Définition 7. Si X est réelle et intégrable, on définit l'espérance de X par $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$. Sinon, on écrit $X = (X_1, \ldots, X_d)$, et si $\|X\|$ est intégrable, on définit l'espérance de X par $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_d])$.

Exemple 8. *(i) Espérance des lois classiques (cf Annexe).*

(ii) Les lois de Cauchy n'admettent pas d'espérance.

Remarque 9. *L'espérance ne dépend que de la loi de la variable aléatoire.*

Définition 10. Si X est de carré intégrable, on définit la variance de X par $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$.

Proposition 11 (Formule de transfert). *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne. Alors $f(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si, et seulement si, $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X)$. Dans ce cas, on a :*

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega f(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mathbb{P}_X(x)$$

Application 12. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\theta > 0$, alors $\theta X \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)$.*

Proposition 13. *La donnée de $\mathbb{E}[f(X)]$ pour toutes les fonctions f continues positives à support compact caractérise la loi de X.*

Remarque 14. *On peut aussi prendre les fonctions continues bornées ou les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.*

Application 15. *Si $U_1, U_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ sont indépendantes $\frac{U_1}{U_2} \hookrightarrow \mathcal{C}(0,1)$.*

II Caractérisation par des fonctions

1) Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle.

Définition 16. On définit la fonction de répartition F_X de X par :

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

Exemple 17. *Fonctions de répartition des lois classiques (cf Annexe).*

Proposition 18. *(i) F_X est croissante, continue à droite, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.*

(ii) Réciproquement, toute fonction satisfaisant le point précédent est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

(iii) Si f est une densité de probabilité, alors $F : x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t)dt$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{P}_Y$ admette pour densité f.

Proposition 19. *F_X caractérise $\mathbb{P}_X$.*

Remarque 20. *On peut généraliser la fonction de répartition pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Le résultat reste valable.*

2) Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{R}^d$.

Définition 21. On définit la fonction caractéristique φ_X de X par :

$$\varphi_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, X\rangle}\right] \end{array} \right.$$

Exemple 22. *Fonctions caractéristiques des lois classiques (cf Annexe).*

Proposition 23. *φ_X caractérise $\mathbb{P}_X$.*

Proposition 24. *Si X est réelle et $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$, alors φ_X est p fois dérivable et $\varphi_X^{(p)}(\lambda) = i^p \mathbb{E}\left[X^p e^{i\lambda X}\right]$. En particulier, $\varphi_X^{(p)}(0) = i^p \mathbb{E}[X^p]$.*

Remarque 25. *Réciproquement, si p est pair et φ_X p fois dérivable en 0, alors $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$. On peut construire X n'admettant pas d'espérance, mais telle que φ_X est dérivable en 0 (admis).*

3) Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{N}$.

Définition 26. On définit la fonction génératrice G_X de X par :

$$G_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \mathbb{E}\left[s^X\right] \end{array} \right.$$

Remarque 27. *Le rayon de convergence de cette série est au moins égal à 1 et $G_X(1) = 1$.*

Exemple 28. *Fonctions génératrices des lois classiques (cf Annexe).*

Proposition 29. *G_X caractérise $\mathbb{P}_X$. En particulier $\mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.*

Proposition 30. *$\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$ si, et seulement si, G_X est p fois dérivable et dans ce cas $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)]$.*

Application 31. $\mathbb{E}[X] = G_X'(1)$ *et* $\mathrm{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.

III Vecteurs aléatoires et indépendance

Soient X, Y des variables aléatoires à valeurs dans E, F des espaces probabilisables.

Définition 32. La loi du couple (X, Y) est appelée loi conjointe. Les lois de X et de Y sont appelées lois marginales.

Remarque 33. *La donnée de la loi conjointe permet de retrouver les lois marginales. La réciproque est fausse : si $X, Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et sont indépendantes, alors (X, X) et (X, Y) ont même lois marginales, mais pas même loi conjointe.*

Proposition 34. *X et Y sont indépendantes si, et seulement si :*

(i) $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$

(ii) $\mathbb{E}[f_1(X) f_2(Y)] = \mathbb{E}[f_1(X)]\,\mathbb{E}[f_2(X)]$ *pour toutes fonctions boréliennes f_1 et f_2.*

(iii) Pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\varphi_{(X,Y)}(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi_X(\lambda_1)\varphi_Y(\lambda_2)$.

Définition 35. On définit la covariance de X et Y par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Proposition 36. *Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$ et $G_{X+Y} = G_X G_Y$ lorsque ces quantités existent.*

Remarque 37. *On peut généraliser ces propositions à des familles quelconques de variables aléatoires.*

IV Convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 38. On dit que (X_n) converge en loi vers X si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\lim_n \mathbb{E}[\varphi(X_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X)]$. On note alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Exemple 39. *Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma_n^2\right)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$, alors X_n converge en loi vers $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.*

Théorème 40 (Lévy)**.** *$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X$.*

On se place maintenant dans le cas réel, où $d = 1$.

Proposition 41. *Si les X_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$.*

Proposition 42. *$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si, et seulement si, $F_{X_n} \to F_X$ en tout point de continuité de F_X.*

Théorème 43 (Théorème central limite)**.** *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}} \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \quad \mathcal{N}(0,1)$$

Application 44. *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de loi $\mathcal{B}(p)$ pour $p \in [0,1]$ inconnu. Le théorème central limite donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour p en fonction de la moyenne empirique $\widehat{p_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$. Il s'agit de :*

$$IC_\alpha = \left[\widehat{p_n} \pm \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right]$$

où q_t est le quantile d'ordre t de $\mathcal{N}(0,1)$.

Application 45 (Monte-Carlo)**.** *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)dt \ p.s.$$

Théorème 46. *Soit $(X_{n,j})_{n\in\mathbb{N}^\star, j\in[\![1,M_n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$, avec $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite croissante de $\mathbb{N}^\star$ qui tend vers $+\infty$. On pose $\mathbb{P}(X_{n,j} = 1) = p_{n,j}$ et $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} X_{n,j}$. On suppose de plus que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} = \lambda > 0$$

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Développements

- Théorème central limite et intervalle de confiance (43,44) [BL07]
- Loi des évènements rares de Poisson (46) [Ouv09]

Références

[BL07] Philippe Barbe and Michel Ledoux. *Probabilité.* EDP Sciences, 2007

[Ouv08] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités : Tome 1.* Cassini, 2008

[Ouv09] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités : Tome 2.* Cassini, 2009

Annexes

Nom	Paramètres	Notation	$\mathbb{P}_X$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{Var}(X)$	$\varphi_X(t)$	$G_X(t)$
Uniforme	$n \in \mathbb{N}^\star$	$\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\delta_k$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$	$\frac{1}{n}\frac{t-t^{n+1}}{1-t}\ (t \neq 1)$
Bernoulli	$p \in [0,1]$	$\mathcal{B}(p)$	$p\delta_1 + (1-p)\delta_0$	p	$p(1-p)$	$pe^{it} + (1-p)$	$1-p+pt$
Binomiale	$n \in \mathbb{N}^\star, p \in [0,1]$	$\mathcal{B}(n,p)$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\delta_k$	np	$np(1-p)$	$pe^{it} + (1-p)^n$	$(1-p+pt)^n$
Géométrique	$q \in [0,1]$	$\mathcal{G}(q)$	$\sum_{k=0}^{\infty} q(1-q)^{k-1}\delta_k$	$\frac{1}{q}$	$\frac{1-q}{q^2}$	$\frac{qe^{it}}{1-(1-q)e^{it}}$	$\frac{(1-q)t}{1-qt}$
Poisson	$\lambda > 0$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\delta_k$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$e^{(\lambda-1)t}$

FIGURE 1 – Lois de probabilités discrètes

Nom	Paramètres	Notation	$f(t)$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{Var}(X)$	$\varphi_X(t)$
Uniforme	$a, b \in \mathbb{R},\ a < b$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Normale	$m \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$	$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$
Exponentielle	$\lambda > 0$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
Cauchy	$m \in \mathbb{R},\ a > 0$	$\mathcal{C}(m,a)$	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{a+(t-m)^2}$			$e^{-\lvert t \rvert}$
Gamma	$\lambda > 0,\ n \in \mathbb{N}^\star$	$\Gamma(\lambda, n)$	$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda t} t^{n-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}$

FIGURE 2 – Lois de probabilités continues